MARTIN GARDNER

CIRCO MATEMÁTICO

ALIANZA EDITORIAL

Título original: *Mathematical Circus*
Traducción publicada por acuerdo con Alfred A. Knopf, Inc.
Traductor: Luis Bou

Primera edición en «El Libro de Bolsillo»: 1983
Segunda edición en «El Libro de Bolsillo»: 1985

Calle Milán, 38; Teléfono 200 00 45
ISBN. 84-206-1937-X
Depósito legal: M. 4.344-1985
Papel fabricado por Sniace, S. A.
Fotocomposición: EFCA, S. A.
Impreso en Closas-Orcoyen, S. L. Polígono Igarsa
Paracuellos del Jarama (Madrid)
Printed in Spain

Para Donald E. Knoth, extraordinario matemático, científico de computadores, escritor, músico, humorista, entusiasta de las matemáticas recreativas y mucho más.

Circo matemático

Martin Gardner

Introducción

A veces estas reflexiones asombran todavía la noche conturbada o el reposo a mediodía. -T. S. Eliot

Los capítulos que componen este libro fueron antes publicados en la sección mensual, fija, Juegos Matemáticos de la revista *Scientific American*. Los matemáticos me preguntan a veces, qué significa para mí semejante titulo. No es fácil de explicar. Ya Ludwig Wingenstein utilizó la palabra «juego» para ejemplificar la noción de «palabras-familia», imposibles de definir unívocamente. La idea de «juego» conlleva muchos significados, enlazados entre sí un poco a la manera en que lo están los miembros de una familia humana, significados que han ido concatenándose al tiempo que evolucionaba el lenguaje. Podemos decir que los «juegos matemáticos» o las «matemáticas recreativas» son matemáticas -no importa de qué tipo- cargadas de un fuerte componente lúdico: pero poco aclaramos así, porque las ideas de «juego», «recreación» y «lúdico» son aproximadamente sinónimas. En último extremo nos encontramos con peticiones de principio, como al decir que la poesía es la obra de los poetas, o que la música de jazz es lo que los músicos de jazz componen o interpretan. Las matemáticas recreativas serían así la clase de matemáticas que hace disfrutar a los recreativistas.

Aunque no puedo definir los juegos matemáticos más rigurosamente que la poesía, sí mantengo que, sean lo que fueren, las matemáticas recreativas proporcionan el mejor camino para captar el interés de los jóvenes durante la enseñanza de la matemática elemental. Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden excitar mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones «prácticas», sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de las experiencias vividas por ellos. Y si el «juego» se elige y prepara con cuidado, puede llevarle casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia.

No sólo los niños, sino también los adultos pueden quedar arrobados por uno de estos rompecabezas sin utilidad previsible, y la historia de las matemáticas está llena de trabajos sobre tales rompecabezas -tanto de profesionales como de aficionados- que han conducido hasta inesperados desarrollos. En su libro *Mathematics: Queen and Servant of Science*, Eric Temple Bell cuenta que los primeros trabajos sobre clasificación y enumeración de nudos apenas fueron considerados otra cosa que curiosidades y rompecabezas. La teoría de nudos ha venido, con el tiempo, a convertirse en rama floreciente de la Topología:

> Así pues, los problemas de nudos resultaron ser mucho más que meros rompecabezas. Y es frecuente que esto suceda en matemáticas, en parte porque los matemáticos replantean -no sin cierta perversidad- difíciles problemas que confiaron (mas no supieron) resolver, dándoles la forma de acertijos y charadas de apariencia

> trivial, pero en el fondo, con idéntica estructura que el problema original. Esta jugarreta ha hecho picar e interesarse a personas ajenas a las matemáticas, quienes, atemorizados ante la dificultad del problema, se habían inhibido o echado atrás. Y así, muchos aficionados han hecho a la matemática ricas aportaciones sin sospecharlo. Tenemos un ejemplo en el problema de los quince escolares (1850) de T. P. Kirkman, que frecuentemente presentan los libros de matemáticas recreativas.

Tampoco faltan rompecabezas matemáticos que -por ser en realidad triviales- no conducen a desarrollos interesantes. Empero, ambos tipos tienen algo en común, que nadie ha expresado mejor que el distinguido matemático Stanislaw Ulam en su autobiografía, *Adventures of a Mathematician*:

> Las matemáticas, con sus grandiosas panorámicas su apreciación de la belleza y su percepción de nuevas realidades, posee una propiedad adictiva que es menos evidente y saludable, afín en cierto modo a los efectos de algunas drogas. El más nimio problema, aún siendo inmediatamente reconocible como trivial o reiterativo, puede ejercer esta influencia adictiva. Una de las formas en que podemos vernos arrastrados es comenzar a resolverlos. Recuerdo *que Mathematical Monthly* publicaba de cuando en cuando unos problemas enviados por un matemático francés, relativos a ciertas configuraciones banales de circunferencias, rectas y triángulos del plano. «Belanglos» (sin importancia), como dicen los alemanes; empero, con estas figuritas corríase el riesgo de quedar atrapado tan pronto se comenzaba a resolverlas, a pesar de saber perfectamente que no podrían conducirnos a campos nuevos, más generales ni más estimulantes. Mucho contrasta esto con cuanto he dicho acerca de la historia del teorema de Fermat, que ha suscitado la creación de nuevas y vastas concepciones algebraicas. La diferencia tal vez resida en que para resolver un pequeño problema puede bastar un esfuerzo moderado, mientras que el teorema de Fermat sigue sin estar resuelto, desafiando al mundo matemático. No obstante, ambos tipos de curiosidades matemáticas tienen una fuerte componente adictiva para el matemático en potencia, cualidad que existe a todos los niveles de la matemática, desde las bagatelas a los aspectos más inspirados.

Martin Gardner
Marzo de 1979

Capítulo 1

Ilusiones ópticas

Las ilusiones ópticas -figuras, objetos o sucesos que no son lo que aparentan al ser percibidos- han tenido y tienen todavía importante papel en las bellas artes, en matemáticas, en psicología e incluso en filosofía. Los antiguos griegos deformaron las columnas del Partenón con el fin de que parecieran perfectamente rectas al ser vistas desde el suelo por la gente. En sus grandes obras murales, los pintores renacentistas solían distorsionar las figuras con objeto de que, miradas desde abajo, parecieran ser de proporciones normales. El interés de los matemáticos por las ilusiones ópticas se debe a que muchas de ellas guardan relación con la perspectiva (una rama de la geometría proyectiva) y con otras cuestiones geométricas. Los psicólogos estudian las ilusiones para saber cómo interpreta el cerebro los datos que le llegan a través de los sentidos. Y los filósofos de diversas escuelas de realismo directo, que mantienen que nosotros percibimos objetos reales externos a nuestras mentes, tienen el problema de explicar cómo pueden entonces presentarse errores de percepción.

Consideradas en su aspecto menos serio, las ilusiones visuales son, sencillamente, divertidas. Disfrutamos sabiéndonos engañados por ellas, por motivos que no se diferencian mucho del placer de ser confundidos por un ilusionista. Las ilusiones nos recuerdan que el ancho mundo exterior no siempre es lo que parece. Nos fijaremos en este capítulo en unas cuantas ilusiones ópticas no demasiado conocidas, que exhalan todas ellas fuerte aroma matemático.

Los procesos de que el cerebro se vale para interpretar los datos visuales son tan complejos y poco conocidos, que no es milagro que en sus explicaciones los psicólogos mantengan opiniones divergentes, cuando no contradictorias, incluso para las ilusiones más sencillas. Entre las más clásicas están el aumento aparente del sol, la luna y las constelaciones cuando están cerca del horizonte. El difunto Edwin G. Boring, de la Universidad Harvard escribió numerosos artículos explicando que la «flusión de la luna» se debe fundamentalmente a la acción de alzar la mirada. Una opinión diferente, que se remonta hasta Ptolomeo, es defendida por Lloyd Kaufman e Irvin Rock en su artículo «*The Moon Illusion*», en *Scientific American* de julio de 1962. Su teoría, basada en el efecto de «distancia aparente», es a su vez refutada por Frank Restle en un trabajo publicado en *Science* del 20 de febrero de 1970.

La opinión actual es que casi todas las ilusiones ópticas se originan en el cerebro, cuando éste va explorando su memoria en busca de lo que Richard L. Gregory denomina «la apuesta óptima», es decir, la interpretación que mejor explique los datos visuales a partir de las experiencias acumuladas por el cerebro. Tal punto de vista está sustentado por el reciente descubrimiento de que muchos animales, entre ellos aves y peces, sufren ilusiones que podrían ser explicadas de esta forma y también, por trabajos de antropología en culturas marcadamente diferentes de la nuestra. Los zulúes, por ejemplo, viven inmersos en un mundo de formas redondeadas. Las cabañas son redondas, y también lo son sus puertas.

Al arar, sus surcos trazan líneas curvas. Raramente tienen ocasión de ver líneas o ángulos rectos, y su idioma no contiene ningún vocablo que signifique «cuadrado». Así nos lo dice John Updike en la segunda estrofa de su poema «*Zulus Live in Land Without a Square*»:

Cuando los zulúes sonreir no pueden,
ceñudos fingen enojos,
para siempre tener curvas
frente a los ojos.
Y las distancias entre lugares y cosas
se calculan «a vuelo de mariposa»...

Diversos estudios recientes han mostrado que ciertas ilusiones relativas a rectas paralelas y esquinas en ángulo, figuras que con tanta frecuencia observamos en el mundo rectangular de las sociedades tecnológicamente adelantadas, difícilmente son percibidas por los zulúes. Los filósofos John Locke y George Berkeley se preguntaron ambos si un ciego de nacimiento que súbitamente recuperase la vista sabría distinguir, sin tocarlos, cuál de dos objetos era un cubo y cuál una esfera. Locke y Berkeley respondieron que no. Una obra de Gregory, *Eye and Brain*, resume estudios recientes en esta misma dirección, y aunque no se llega a conclusiones tajantes, sí parece dar la razón a aquellos filósofos, aportando de nuevo pruebas que justifican el enfoque moderno, a saber, que casi todas las ilusiones ópticas se deben a que el cerebro interpreta erróneamente los datos que recibe.

El descubrimiento de figuras «indecidibles» ha suscitado nuevos y entretenidos desarrollos en la teoría de las ilusiones visuales. Las figuras indecidibles representan objetos que no pueden existir. La mente, incapaz de encontrarles pies ni cabeza, queda sumída en un estado de curiosa perplejidad. (Son figuras que recuerdan proposiciones indecidibles, como «Esta proposición es falsa», o «No te lo pierdas si puedes».) Entre las figuras indecidibles, la más conocida es el notable «*blivet*» (que un americano pronunciaría casi igual que «*believe it*», «créalo») de tres columnas (¿o sólo dos?) que vemos en la Figura 1.

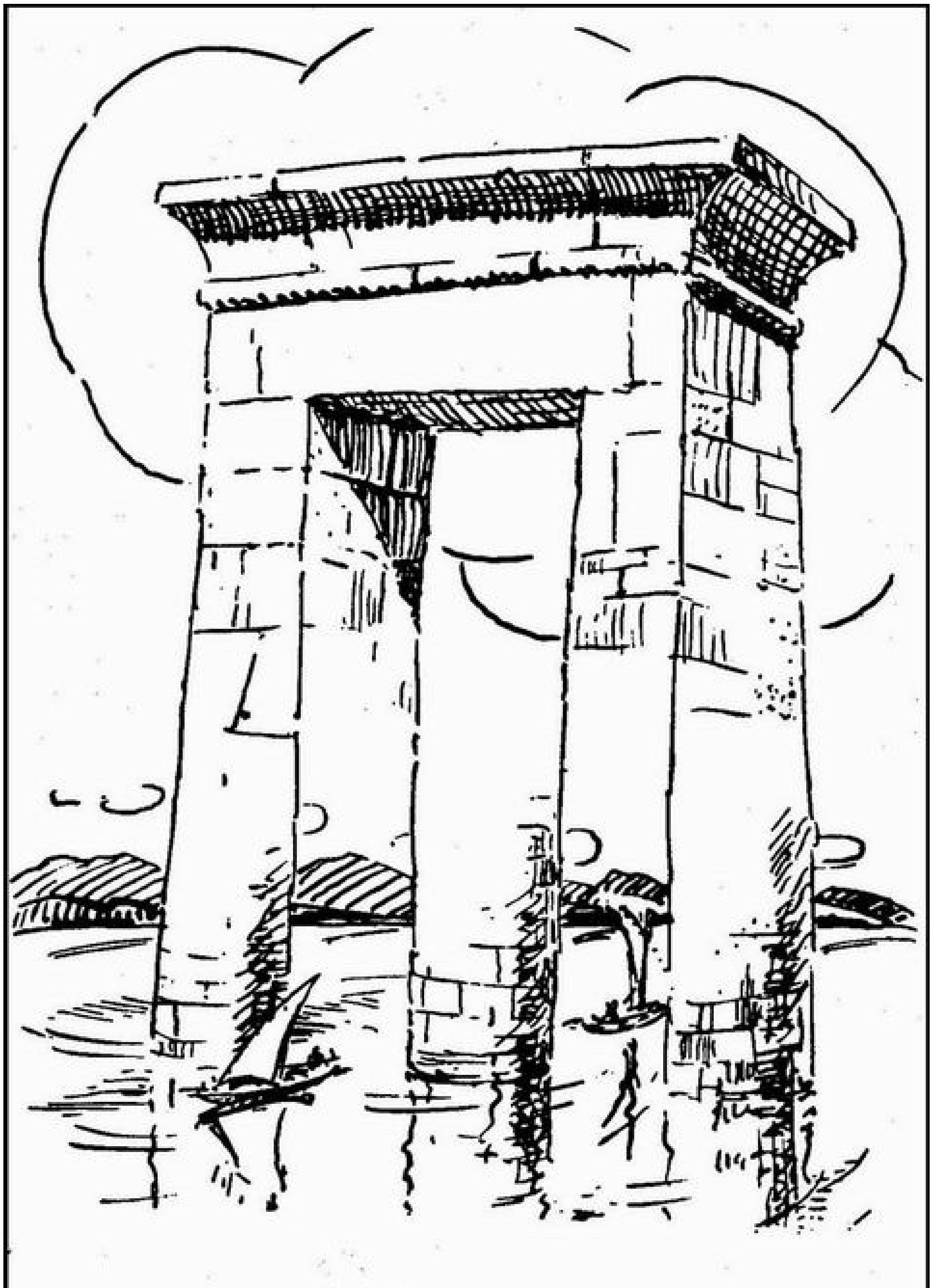

FIGURA 1. *El monumento «indecidible» proyectado por Roger Hayward.*

Las primeras versiones empezaron a circular entre ingenieros y proyectistas hacia 1964, y la portada del número de marzo de 1965 de la revista *Mad* mostraba a un Alfred E. Neuman sonriente y haciendo equilibrios con el *blivet* sobre su dedo índice. Roger Hayward ha publicado un artículo sobre «*Blivets: Research and Development*» [Investigación y desarrollo de los blivets] en *The Worm Runners Digest* (diciembre de 1968), donde presentaba algunas variantes (véase la Figura l).

Otra conocida figura indecidible es una escalinata cuadrada por la que se puede ascender o descender indefinidamente sin por ello subir ni bajar. Puede verse en una litografía de Maurits C. Escher titulada «Ascendiendo y descendiendo», que data de 1960, así como en otra litografía del mismo artista, de 1961, que representa un salto de agua haciendo funcionar una máquina de movimiento perpetuo. Esta desconcertante ilusión, creada por el genetista inglés L. S. Penrose y por su hijo, el físicomatemático Roger Penrose, fue inicialmente publicada en un artículo de ambos, «*Imposible Objects: A Special Type of Visual Illusion*» [Un tipo especial de ilusiones visuales: los objetos imposibles], en *The British Journal of Psychology* (febrero de 1958, pp. 31-33).

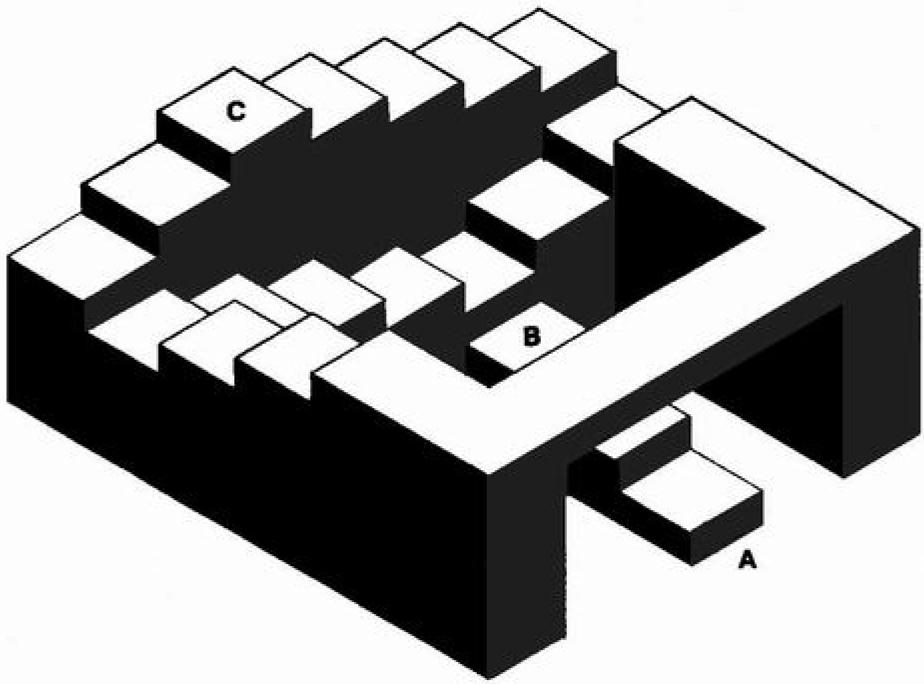

FIGURA 2. *Un enigma basado en la escalinata de Penrose.*

Estos mismos dos autores se sirvieron otra vez de ella en su colección de originales «rompecabezas navideños» publicada en *The New Scientist* (25 de diciembre de 1958, pp. 1580-81). Admitiendo (véase la Figura 2) que hagan falta tres peldaños para ir desde A, en el suelo, hasta lo alto del escalón B, ¿cómo se puede ir desde A hasta C sin subir más de 10 escalones? La solución sólo es posible porque la propia estructura dibujada no lo es.

Un tercer objeto imposible también muy conocido es la armazón del cubo sostenido por la figura sedente de otra famosa litografía de Escher, que puede verse en la página 110 de mi Carnaval matemático. La sección de «Cartas» de *Scientific American* reproducía una fotografía de esta «Canasta de acceso libre» (así fue llamada) en el número de junio de 1966; en realidad aquella fotografía se obtuvo retocando el negativo. No obstante, sí es posible construir un modelo real que visto desde un ángulo adecuado nos dé una auténtica fotografía de la «canasta». Su construcción ha sido explicada por William G. Hyzer en *Photo Methods for Industry*, enero de 1970.

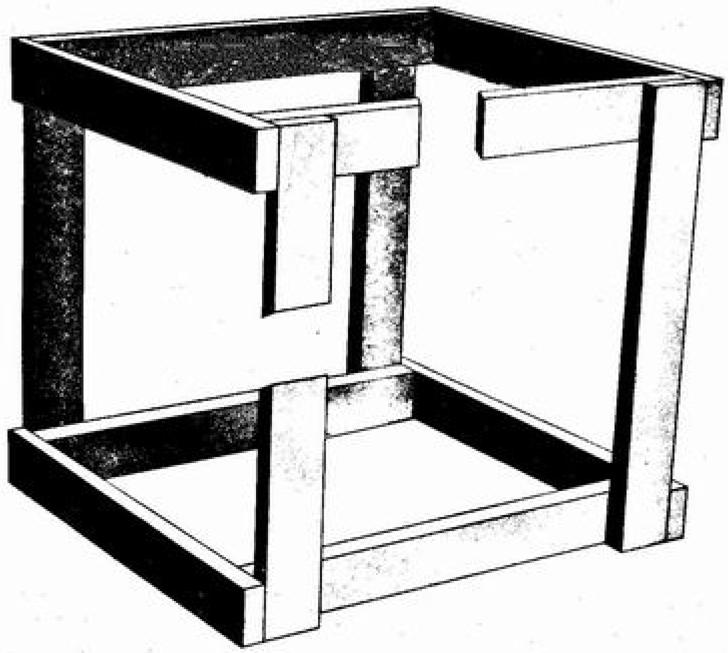

FIGURA 3. *Un posible modelo para una canasta imposible.*

Vemos en la Figura 3 el modelo de Hyzer. Si lo giramos y ladeamos hasta que, observándolo con un solo ojo, los huecos coincidan con toda exactitud con dos travesaños traseros del armazón, el cerebro se convence de que las aristas traseras están delante, produciendo la imagen mental de un cubo imposible.

Muchas otras curiosas ilusiones son debidas a que poseemos dos ojos. Extienda los brazos ante sí, manteniendo los dedos índices de ambas manos estirados horizontalmente, con las puntas en contacto. Mirando más allá de los dedos, enfoque la mirada sobre una pared distante, y separe los dedos ligeramente. Verá entonces una «salchicha flotante» entre los dedos. Como es obvio, la salchicha está formada por las imágenes superpuestas de las yemas de los dedos, vistas cada una por distinto ojo. Otra antigua ilusión, también debida a la visión binocular, se produce acercando un tubo (es suficiente una hoja arrollada de papel) a un ojo, como si fuera un telescopio. Supongamos que llevamos el tubo al ojo derecho; la mano izquierda, con la palma vuelta hacia uno mismo, se coloca verticalmente pegada al borde izquierdo del tubo. Deslizando hacia adelante y hacia atrás la mano izquierda a lo largo del tubo, con los dos ojos abiertos y mirando algún objeto distante, se encontrará un punto donde parecerá que estamos mirando a través de un agujero recortado en el centro de la mano izquierda.

En ciertas circunstancias, también la visión monocular puede crear una ilusión de profundidad. Mirando una fotografía con un solo ojo a través de un tubo se produce un ligero efecto de tridimensionalidad. Una de las más llamativas ilusiones de la visión monocular puede verse en la Figura 4.