Ecuación diferencial de Cauchy-Euler

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

Miguel Iván Bobadilla

Tabla de contenido

Ecuación diferencial de Cauchy-Euler

Una ecuación diferencial de Cauchy-Euler es una ecuación lineal con coeficientes variables cuya solución general puede ser expresada en términos de potencia de $x, senos, cosenos$ y funciones logarítmicas, a diferencia de otras ecuaciones con coeficientes variables que usualmente se expresan en forma de series infinitas. Estas ecuaciones diferenciales tienen la forma $a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$ donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ son constantes. La principal característica de este tipo de ecuación es que el grado de la variable independiente es similar al orden de la derivada que la acompaña.

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

Como podemos observar en la ecuación anterior la primera expresión de la ecuación la variable independiente es de segundo grado y la derivada que la acompaña es de segundo orden, en la siguiente la variable x es de primer grado y la derivada que la acompaña es de primer orden, en la que sigue la variable x es de grado cero y su derivada es de orden cero. Como vemos, tanto el grado de la variable independiente como el orden de la variable que la acompañan son iguales, por lo tanto, dicha ecuación diferencial es una ecuación de Cauchy-Euler.

Para resolver una ecuación diferencial de Cauchy-Euler se prueba una solución del tipo $y = x^m$ y se resuelve su homogénea asociada por el método de coeficientes constantes, luego -si es necesario- para encontrar la solución particular usaremos el método de variación de parámetro. Como ejemplo vamos a utilizar la misma ecuación anterior vista, que es una ecuación diferencial homogénea. Como la derivada más grande que contiene la ecuación es de segundo orden vamos a derivar dos veces el tipo de solución que ha sido propuesto, es decir, x^m.

$$y = x^m$$

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Lo siguiente que haremos es sustituir la función y sus derivadas en la ecuación diferencial.

$$ax^2(m(m-1)x^{m-2}) + bx(mx^{m-1}) + c(x^m) = 0$$

Lo que haremos a continuación es efectuar las multiplicaciones y factorización correspondientes para poder reducir la expresión para que se nos haga más cómodo el trabajo.

$$ax^2(m(m-1)x^{m-2}) + bx(mx^{m-1}) + c(x^m) = 0$$

$$am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m = 0$$

$$x^m[am(m-1) + bm + c] = 0$$

$$x^m[am^2 - am + bm + c] = 0$$

Nos ha quedado un producto en la que nos queda la expresión x^m y una ecuación cuadrática como ecuación auxiliar la cual ambas valen cero. Por obvias razones la expresión x^m al valer cero la desechamos, por lo tanto, los valores que andamos buscando para nuestra solución están en la ecuación cuadrática $am^2 - am + bm + c = 0$. Como ya sabemos solo debemos resolver dicha ecuación cuadrática y así encontrar los valores de m que construyen la solución a la ecuación diferencial.

Soluciones de la ecuación de Cauchy-Euler

Las soluciones que se obtendrán de las ecuaciones de Cauchy-Euler dependerán del caso que se presente.

Reales y distintas

En caso de que sean $m_1, m_2, \dots, m_n$ reales y distintos entonces la solución tiene la siguiente forma:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \cdots + c_n x^{m_n}$$

Reales y repetidos

En caso de que $m_1, m_2, \dots, m_n$ sean reales y repetidos la solucion tiene la siguiente forma:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} lnx + c_3 x^{m_3} (lnx)^2 \dots + c_n x^{m_n} (lnx)^{k-1}$$

Complejos conjugados

En caso de que la ecuación auxiliar produzca raíces complejas $m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta$ donde $\alpha \ y \ \beta > 0$ son reales, se describe la solución en términos de funciones reales aplicando la identidad de Euler.

$$y = x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ lnx) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ lnx)]$$

Ecuación de Cauchy-Euler no homogénea

Como se ha mencionado anteriormente en caso de que la ecuación diferencial de Cauchy-Euler no sea homogénea y necesitemos encontrar una solución particular aplicaremos el método de variación de parámetro. Dicho método consiste en reemplazar la constante c_i por funciones $u_i(x)$, donde $i = 1,2,3 \ldots n$, de tal manera que la solución particular tenga la siguiente forma:

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$$

Donde $y_i(x)$ forman un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo de la homogénea asociada y la función $u_i(x)$ es lo que vamos a determinar. Para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden procedemos a derivar hasta su segunda derivada la suposición y sustituyendo dichas derivadas y la función en la ecuación diferencial del mismo orden en su forma estándar $y''_p + P(x)y'_p + Q(x)y_p = f(x)$ se obtendrá de ello un sistema de ecuaciones para determinar las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$.

$$y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$$

$$y'_1 u'_1 + y'_2 u'_1 = f(x)$$

Por la regla de Cramer, la solución del sistema puede expresarse en términos de determinantes.

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} \qquad u'_2 = \frac{W_2}{W}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}$$

El determinante W se conoce como el Wroskiano de y_i. Debido a que $W(y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x).) \neq 0$ para todo x en el intervalo, por lo tanto, y_i son linealmente independientes. Con estos determinantes podemos encontrar los valores para $u'_i(x)$. Como ya sabemos los valores para $y_i(x)$ están en la solución complementaria, por lo que queremos determinar es a $u_i(x)$ y como los determinantes nos dan los valores para $u'_i(x)$, solo es cuestión de integral y formar la solución particular.

Para ecuaciones de tercer orden o mayor se hace igual como lo hicimos con el caso para las ecuaciones de segundo orden, donde las primeras $n-1$ ecuaciones del sistema tendrán el valor de cero. Por la regla de Cramer los Wroskiano para y_i tendrá W_i determinantes.

$$u'_i = \frac{W_i}{W}$$

Por ejemplo, para una ecuación diferencial de Cauchy-Euler de tercer orden los determinantes serían los siguientes:

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y'_3 \end{bmatrix} \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y'_2 & y'_3 \\ f(x) & y''_2 & y'_3 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y'_1 & 0 & y'_3 \\ y''_1 & f(x) & y'_3 \end{bmatrix} \quad W_3 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y'_1 & y'_2 & 0 \\ y''_1 & y''_2 & f(x) \end{bmatrix}$$

De los pasos anteriores mencionados no es necesario hacerlos todos, lo único que debemos saber son los determinantes, lo demás solo es con fines de saber de dónde salen los determinantes.

Luego de obtener la solución particular se la sumamos a la solución complementaria y con esto obtenemos la solución general, es decir, $y = y_c + y_p$.

Ejemplo

$$x^2y'' - xy' + y = 2x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3$$

La ecuación diferencial no homogénea de segundo orden anterior se puede apreciar que el grado de las variables independientes son los mismos que el orden de las derivadas que la acompañan, por lo que es una ecuación diferencial de Cauchy-Euler, además de que tenemos condiciones iniciales. Como ya hemos aprendido primero procedemos a resolver su homogénea asociada.

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

Como la ecuación diferencial es de segundo orden debemos derivar nuestra propuesta hasta su segunda derivada.

$$y = x^m$$

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Lo que sigue es sustituir en la ecuación diferencial.

$$x^2m(m-1)x^{m-2} - x(mx^{m-1}) + x^m = 0$$