GEOMETRIA RECREATIVA
PARTE PRIMERA
GEOMETRIA AL AIRE LIBRE

El idioma de la naturaleza es matemática,
letra de esta lengua, son los círculos,
triángulos y otras figuras geométricas.
Galileo.

CAPITULO PRIMERO
GEOMETRÍA EN EL BOSQUE

Contenido:

1. Por longitud de la sombra.

Todavía recuerdo esa atención, con la que yo estuve mirando por primera vez a un canoso guardabosque, el que estando junto a un pino grande, ha medido su altura con un aparato de bolsillo. Cuando él apuntó con una tablilla cuadrada en la cima del árbol, yo esperaba, que el viejo subiera con una cadena para medir, en lugar de ello, él volvió a meter en el bolsillo el aparato y dijo que la medición estaba terminada. Yo pensaba que por el momento no había comenzado...

En aquel tiempo yo era muy joven y esa manera de medir, cuando la persona establece la altura del árbol sin cortarlo o sin subirse a él, me parecía como un milagro pequeño. Tan solo mas tarde, cuando tuve las primeras naciones geométricas, he entendido, como es de fácil hacer ese tipo de milagros.

Existen muchas maneras distintas de realizar semejantes mediciones con ayuda unos aparatos sin pretensión y sin mecanismos especiales.

Un modo que es muy fácil y muy antiguo, sin duda, que con él, el sabio griego Falos, seis siglos antes de Cristo, definió en Egipto la altura de la pirámide. Él aprovechó la sombra suya. Los sacerdotes y faraón, reuniéndose al pie de la pirámide, miraban confusamente al extranjero, adivinando por la sombra la altura de la gran construcción. Falos, dice la leyenda, eligió el día cuando la longitud de su sombra era igual a su altura, en el mismo momento, la altura de la pirámide tenía que ser iguala a la longitud de su sombra. Es el único caso, cuando la persona aprovecha su sombra.

La tarea del sabio griego nos parece ahora infantil, fácil, pero no tenemos que olvidar, que estamos mirando desde la altura del edificio geométrico, levantado después de Falos. Él vivió mucho tiempo antes del Euclides, que es el autor del libro famoso, con el cual estudiaron la geometría durante dos siglos, después de su fallecimiento. En concreto, las verdades del libro que ahora las conoce cualquier alumno, no estaban descubiertas en la época de Falos. Y aprovechándose de la sombra para resolver la tarea sobre la altura de la pirámide, necesitaba saber algunas características geométricas del triángulo, prácticamente las dos siguientes (Falos fue el primero en enunciar estos principios):

1. *Los ángulos sobre la base de un triángulo isósceles, son iguales, e inversamente, los lados, opuestos a los ángulos iguales del triángulo isósceles, son iguales.*
2. *La suma de los ángulos de cualquier triángulo (el triángulo rectángulo es un caso particular), es igual a dos ángulos rectos.*

Falos, armado solo de estos conocimientos, pudo discurrir, que estando sobre un terreno plano, su sombra era igual a su altura, los rayos de Sol caen en un ángulo igual a la mitad del recto, por lo tanto, la altura de la pirámide desde el centro de su base y el extremo de su sombra definían un triángulo isósceles.

Con ayuda de ese método, que nos parece tan simple, durante un día soleado podemos hacer mediciones de cualquier árbol aislado, cuando su sombra no se une con la sombra de otro. Pero en nuestras latitudes (San Petersburgo está en la latitud 60°N y El Cairo, 30°N) no es tan fácil elegir un buen momento como en Egipto; el Sol se presenta muy bajo sobre el horizonte, y las sombras pueden ser iguales a la altura de sus objetos, solo durante el verano y en torno al mediodía. Por eso el modo del Falos no es siempre cómodo para llevar a la practica.

No es difícil calcular la altura de una manera un poco distinta, cuando en cualquier día soleado se puede usar la sombra, no importando su longitud. Se puede medir su propia sombra o la de una pértiga enterrada verticalmente en un suelo plano y calcular la altura buscada con la proporción siguiente (figura 1):

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$$

Es decir, la altura del árbol en cuantas veces mayor que la altura de Ud. (o la altura de la pértiga), en tantas veces la sombra del árbol es más larga de la sombra Ud. (o la sombra de la pértiga). Esto se deduce de la semejanza geométrica de los triángulos *ABC* y *abc* (por dos ángulos).

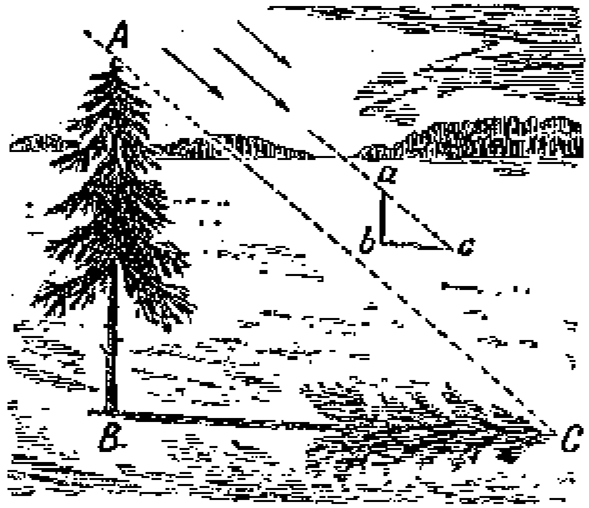

Figura 1. Medición de la altura de un árbol por su sombra

Algunos lectores replican, pues, que esta manera es tan elemental que no necesita argumentación geométrica. ¿Es posible que sin geometría, quede claro, en cuántas veces un árbol es más alto, en tantas veces como su sombra es mas larga? Ocurre que no es tan fácil como parece. Intente llevar a la práctica esta regla de la sombra, proyectando una con la luz de una lámpara, verá que no se cumple.
En la figura 2 se ve el poste *AB* más alto que la columna pequeña *ab*, aproximadamente al triple, y la sombra del poste más larga que la sombra de la columna (*BC : bc*) unas ocho veces. Explicar por qué en una ocasión podemos emplear el modo, y en otro no; sin geometría no es posible.

Problema
Vamos a ver dónde está la diferencia. Lo que pasa es que los rayos de Sol son paralelos entre ellos, los rayos de farola no son paralelos. Esto último está claro, pero ¿cómo que los rayos de Sol son paralelos, cuando ellos, sin duda, están cruzándose en el mismo lugar de donde están saliendo?

Solución
Los rayos de Sol, cayendo sobre la Tierra, los podemos considerar paralelos, porque el ángulo entre ellos es muy pequeño, prácticamente imperceptible. Un simple cálculo geométrico puede aclarar la situación confusa. Imagínese dos rayos saliendo desde cualquier punto del Sol y cayendo sobre la Tierra a una distancia entre ellos de un kilómetro mas o menos. Entonces, si ponemos una pata del compás en el punto del Sol y hacemos una circunferencia de radio igual a distancia entre el Sol y Tierra (150.000.000 km), entonces nuestros dos rayos–radios sostienen un arco justo de un kilometro de longitud.
La longitud total de esta gigantesca circunferencia igual a

$$L = 2 \times \pi \times 150.000.000 = 940.000.000 \text{ km}$$

Un grado de ella, evidentemente, es 360 veces menor, es decir, mas o menos 2.600.000 km; Un minuto de arco es 60 veces menor del grado, es igual a 43.000 km, y un segundo de arco en 60 veces menor, es igual 720 km. Pero nuestro arco tiene la longitud de 1 km; es decir, corresponde al ángulo 1/720 segundos. Ese ángulo es imperceptible, incluso para aparatos astronómicos; por lo tanto, prácticamente podemos considerar que los rayos de Sol, caen a la Tierra en forma paralela.

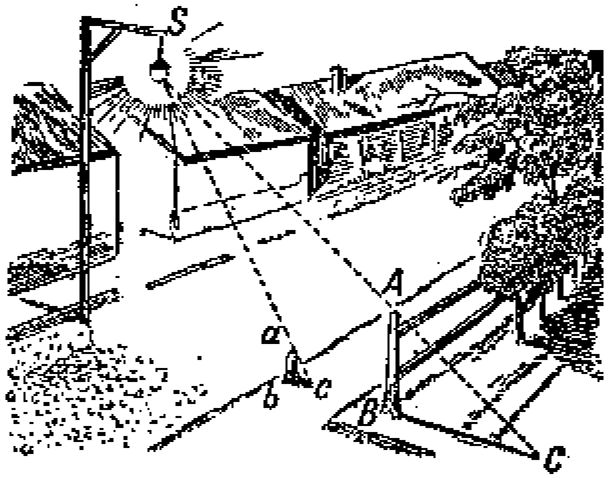

Figura 2. Cuando el mismo modo de medición es imposible.

Sin consideraciones geométricas no podemos argumentar el modo examinado, haciendo la proporción de la altura por su sombra.
Si llevamos a la práctica el sistema de las sombras, constataremos su inexactitud. Las sombras no son limitadas de manera precisa; ellas tienen un contorno difuso por lo que su límite es indeterminado.
Esto ocurre, porque el Sol no es un punto, es un gran cuerpo luminiscente, emite los rayos desde más de un punto.
La Figura 3 indica por qué la sombra *BC* del árbol tiene una adición de la penumbra *CD,* el que poquito a poco desaparecerá. El ángulo *CAD* entre los limites de la penumbra corresponden al ángulo, sobre el que siempre podemos ver el disco de Sol, es decir, mitad de un grado. Aparecerá un error, por que tendremos dos sombras, ambas correctas. Este error puede alcanzar un 5% o más, si la posición del sol es baja, ambas sombras sean medidas no exactamente correcto, con un bajo estado de Sol procede alanzar 5% y más.

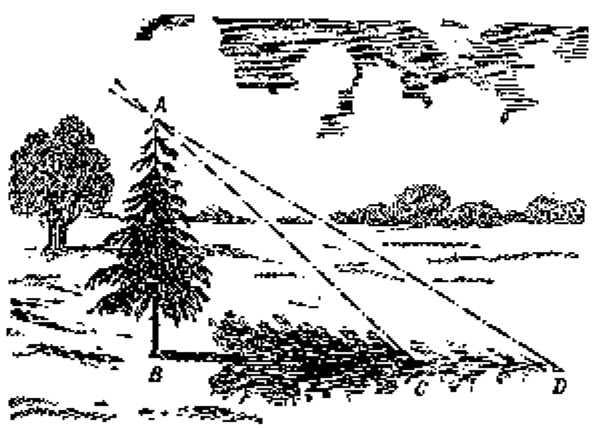

Figura 3. Cómo aparece la sombra

A estos errores se le unen otros, como por ejemplo, accidentes del terreno, y el resultado es poco seguro. En los sitios montañosos este modo es inaplicable.
Volver

2. Dos modos mas

Es muy posible hacer mediciones de la altura sin ayuda de las sombras. Existen muchas maneras; empezaremos con dos fáciles.

Antes de todo podemos utilizar las propiedades del triángulo rectángulo isósceles, aprovechando un simple aparato, lo cual es fácil de preparar a través de una tablilla y tres alfileres. Sobre una tablilla lisa marcamos tres puntos, los vértices del triángulo rectángulo isósceles, en los puntillos clavamos alfileres (Figura 4). Si no tiene escuadra y compás para dibujar el triángulo, entonces puede coger el papel, lo dobla una vez, después lo dobla transversalmente al primer doblez, de modo que ambas partes del primer doblez se unen, y se obtiene el ángulo recto. El mismo papel puede ser útil para medir los trozos iguales.

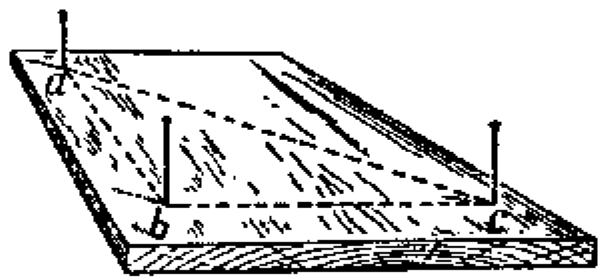

Figura 4. El aparato de alfileres para la medición a las alturas

Como vemos, el aparato lo podemos preparar en distintas formas.
Utilizar este aparato es tan fácil como prepararlo. Alejándose del árbol, teniendo el aparato de modo que uno de los catetos del triángulo apunte verticalmente, para facilitar la observación, podemos utilizar una plomada (un hilo con un objeto pesado atado a un extremo) atada al alfiler superior.
Acercándose al árbol o alejándose de él, Ud. siempre encontrará un sitio *A* (Figura 5), desde cual, mirando a los alfileres *a* y *c,* verán, que ellos taparán la cima *C* del árbol: eso significa que la prolongación de la hipotenusa *ac* pasa por el punto *C*. Como ya lo hemos visto en el ejemplo anterior, la separación entre *ab* es igual a *CB*, ya que el ángulo *a = 45°.*
Por consecuencia, acabando de medir el trazo *aB* y añadir *BD*, es decir, elevación *aA* del ojo sobre el fondo, recibimos la altitud buscada del árbol.

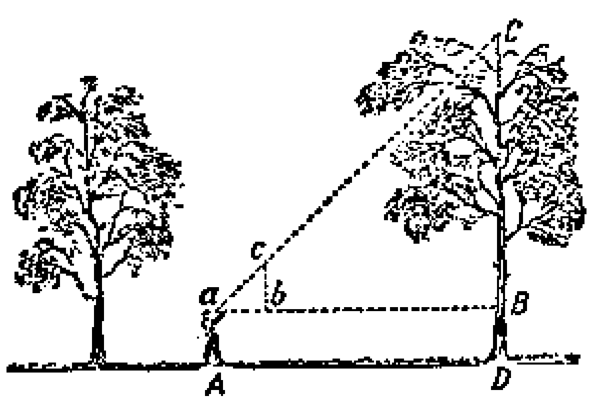

Figura 5. Esquema del uso al aparato de alfileres

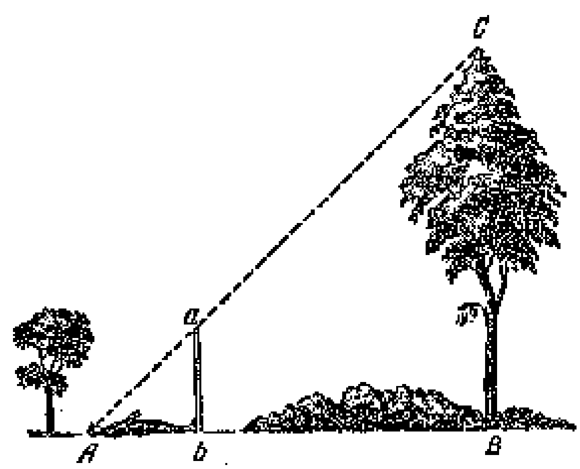

Figura 6. Un modo mas para medir la altura.

Existe otro modo, que no usa tablilla con los alfileres. Necesitamos una pértiga, la cual clavamos verticalmente en la tierra de modo que la parte que sobresale sea igual a su estatura. El sitio elegido para la pértiga debe ser tal que nos permita al tumbarnos como indica la Figura 6, podamos ver la cima del árbol y el punto superior de la pértiga sobre una línea recta. Como triángulo *Abc,* es isósceles y rectangular, entonces el ángulo $A = 45°$, y por lo tanto

$$AB = BC,$$

es la altura buscada del árbol
Volver

3. El modo de Julio Verne

El siguiente modo tampoco es difícil. La manera de medir los objetos altos lo describió en su novela “La isla misteriosa” Julio Verne:
–Hoy vamos a medir la altura de una plazoleta de la Vista Lejana, –dijo el ingeniero.
–¿ Necesitamos algunos instrumentos? –preguntó Gebert.
–No hace falta. Lo haremos de otra manera, más fácil y más segura.
El joven, aplicadamente sigue detrás bajándose desde el muro hasta la orilla. Cogiendo una pértiga de 12 pies de longitud, el ingeniero lo hizo exacto, comprobándolo con su estatura, la cual sabia muy bien. Gebert le trajo una plomada, dada por el ingeniero; fue una piedra atada al extremo de una cuerda. Acercándose 500 pies al muro granítico y vertical, el ingeniero clavó la pértiga, verticalmente con la ayuda de la plomada, en la arena. Un poco después se alejó tanto de la pértiga, que tumbándose pudo ver el extremo de la pértiga y la cresta de montaña sobre una línea recta (Figura 7). Este punto lo marcó con un palito.
–¿Tienes algunas nociones geométricas?–preguntó a Gebert.
–Sí.
–¿Recuerdas las propiedades de los triángulos semejantes?
– Sus lados análogos son proporcionales.
–Exacto. Ahora voy a construir dos triángulos rectángulos semejantes. El cateto del pequeño sea la pértiga, el otro cateto, sea la distancia desde el palillo hasta el pie de la pértiga; la hipotenusa, es la línea de mi vista. En el triángulo mayor los catetos son la muralla, la altura que queremos medir, y la distancia desde el palillo hasta el pie de la muralla; hipotenusa es la línea de mi vista, uniéndose con la hipotenusa triángulo menor.
–¡He entendido! – exclamó el joven. El trayecto del palillo hasta la pértiga corresponde así al trayecto desde el palillo hasta el pie de la muralla, como la altura de la pértiga a la altura de la muralla.
–Exactamente. Sigamos, si medimos las dos distancias primeras, y sabiendo la altura de la pértiga, podemos calcular el cuarto miembro de la proporción que es la altura de muralla.
Ambas líneas horizontales fueron medidas: la pequeña es de 15 pies, la grande es de 500 pies.
Al fin el ingeniero lo hizo anotación:

$$\frac{15}{500} = \frac{10}{x}$$
$$15x = 5000$$
$$x = 333{,}3 \text{ pies}$$

Entonces, la altura de la muralla es 333 pies.

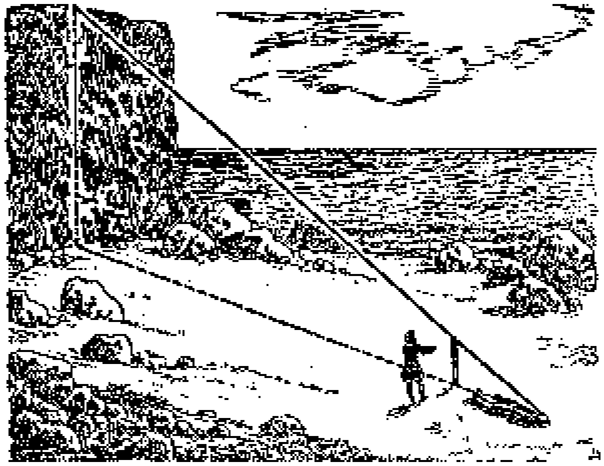

Figura 7. Como encontraban la altura de una escala los personajes de Julio Verne

Volver

4. Como actuó el coronel

Algunos modos, descritos anteriormente, no son cómodos por la necesidad de tumbarse sobre la tierra. Pero ese tipo de incomodidades las podemos evitar.

Así ha ocurrido un día en un frente durante la Segunda Guerra Mundial. A la subdivisión del teniente Ivanov le mandaron a construir un puente por encima de un río de montaña, enfrente del lugar donde desembarcó el enemigo.

Para reconocimiento de un terreno boscoso, mandaron un grupo de búsqueda con el mayor coronel Papov...En el monte cercano ellos midieron el diámetro y las alturas de los arboles más típicas de aquella zona, establecieron la cuenta de los arboles útiles.

Establecieron las alturas de los arboles con ayuda de una jalón, como indica la Figura 8.

Explicación del modo.

Necesitamos una pértiga mucho alta que nuestra propia estatura, la clavamos en la tierra a cierta distancia del árbol (Figura 8). Alejándose atrás de la pértiga, a continuación *Dd* hasta el sitio *A,* desde cual, mirando a la copa del árbol, veremos el punto superior *b* de la pértiga, sobre la una línea recta. Después, sin cambiar la posición la cabeza, se mira en el sentido de una línea recta horizontal *aC,* marcando los puntos *c* y *C,* donde la línea de la vista encuentra la pértiga y el tronco. Piden al ayudante hacer las marcas en aquellos puntos, y la observación se ha terminado. Solo es necesario, en virtud de la semejanza de los triángulos *abc* y *aBC,* calcular *BC* de la proporción.

$$BC : bc = aC : aC$$

Donde

$$BC = \frac{bc \times aC}{ac}$$

Las distancias *bc, aC* y *ac* son fáciles de medir inmediatamente. Al resultado de tamaño *BC* añadir la distancia *CD,* para encontrar la altura buscada.

Para la determinación de la cantidad de los arboles, el coronel dio órdenes a los soldados de medir la superficie del bosque. Después calculó la cantidad de arboles dentro de un terreno 50×50 metros cuadrados e hizo los cálculos correspondientes.

De todos los datos recogidos, el coronel ha puesto en orden las cosas, dónde y cómo construir mejor el puente, el que fue construido rápidamente y la misión de combate fue cumplida.

Volver

5. Con ayuda de una agenda

En otro lugar, para tener los resultados aproximados de las alturas inaccesibles, podemos utilizar nuestra agenda y un lápiz. Ella nos ayuda a construir en el espacio dos triángulos semejantes, desde cuales obtenemos la altura buscada. Sujetamos la libreta cerca de los ojos, como indica la Figura 9. Ella tiene que estar en plano vertical y el lápiz sobresaliendo encima del canto de libreta tanto, que mirando desde el punto *a,* ver la cima *B* del árbol tapado por la punta *b* del lápiz. Como consecuencia de los triángulos semejantes *abc* y *ABC,* la altura *BC* determina de la proporción:

$$BC : bc = aC : ac$$

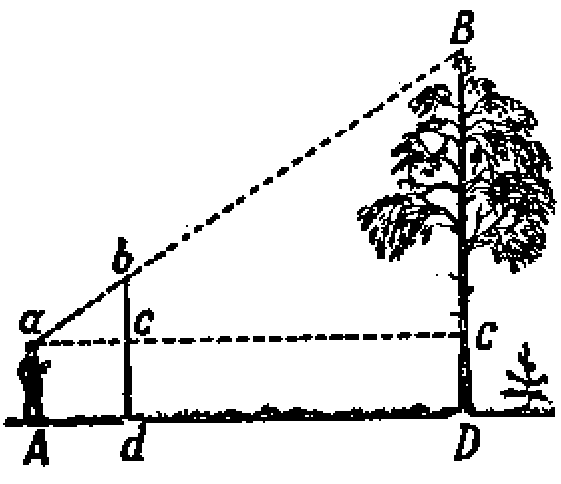

Figura 8. Medición de altura con la ayuda de una pértiga.

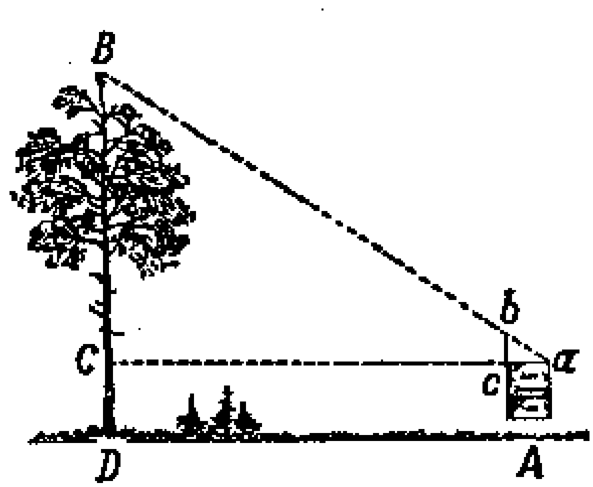

Figura 9. Medición de altura con la ayuda de una agenda.

Las distancias *bc, ac* y *aC* se miden inmediatamente. Al resultado de tamaño *BC* es necesario añadir la longitud *CD,* es decir, en un sitio plano, la altura de los ojos sobre el piso.

Como la anchura de la agenda es invariable, y si nosotros siempre vamos a estar a la misma distancia del árbol (por ejemplo 10 m), la altura dependerá solo del parte sobresalida *bc* de lápiz. Por eso se puede hacer antes el cálculo, a cuál la altura corresponde una u otra altura *bc* sobresaliente, y marcar estas cifras sobre el lápiz. La agenda se convierte a un altímetro, con su ayuda se puede definir la altura inmediatamente, sin cálculos.

Volver

6. Sin acercarse al árbol

Algunas veces, por cualquier causalidad, no podemos acercarse justo al pie del árbol. ¿Podemos en esta ocasión determinar su altura?

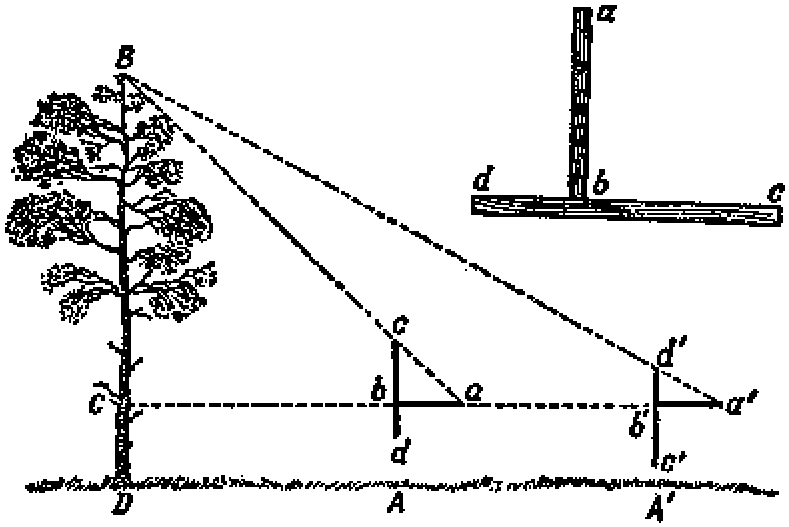

Figura 10. Uso de un altímetro, construido solo con dos tablillas.

Es posible. Para eso inventaron un aparato muy ingenioso, el que, como aparatos anteriores, es fácil de preparar. Dos tablillas *ab* y *cd* (Figura 10) se fijan en ángulo recto de modo que *ab* sea igual *bc,* y *bd* sea la mitad de *ab.* Es todo el truco.

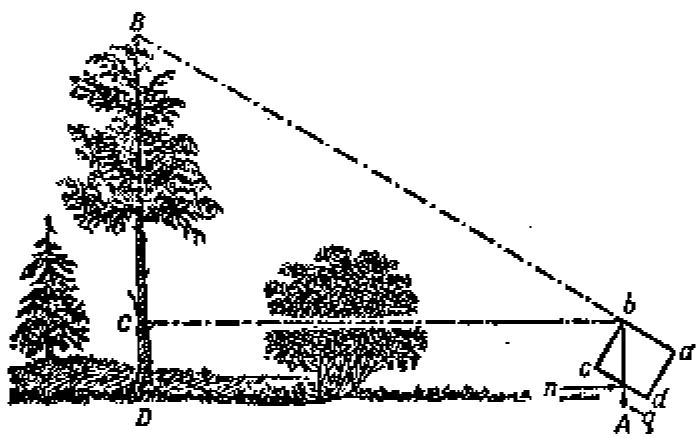

Figura 11. Esquema del uso al altímetro de los silvicultores.

Para poder medir, se mantiene el aparato en los manos, apuntando la tablilla *cd* verticalmente (para eso existe una plomada, el cordoncillo con el plomo), y se ubica sucesivamente en dos sitios: primero (figura 10) en el punto *A,* donde se sostiene el aparato con la punta *c* hacia arriba, y después en el punto *A'*, más alejado, donde el aparato donde el aparato se sostiene con la punta *d* hacia arriba. El punto *A* se elige así: mirando desde el punto *a* al punto *c,* en línea con la cima del árbol. El punto *A'* se busca así: mirando desde el punto *a* al punto *d,* en línea con la cima del árbol. La distancia entre los puntos *A* y *A',* es igual a la altura *BC* del árbol. La igualdad se deduce de

$$aC = BC,$$

y

$$a'C = 2BC ;$$

entonces,

$$a'C - aC = BC$$

Como se ve, utilizando este aparato tan simple, medimos el árbol, sin acercarnos a su base más que a la distancia igual que su altura. Se supone, que si es posible acercarse al tronco, entonces, es suficiente encontrar un punto *A* o *A'* para saber su altura.
En lugar de dos tablillas podemos utilizar dos alfileres, situándolos apropiadamente sobre una tabla. Así el “aparato” mucho más simple.
Volver

7. El altímetro de los silvicultores.
Casi es la hora de explicar, como son hechos los “verdaderos” altímetros, los que utilizan los silvicultores. Describo un altímetro semejante, un poco modificado, para poderlo construir por sí mismo. El sentido de estructura se ve en la figura 11.

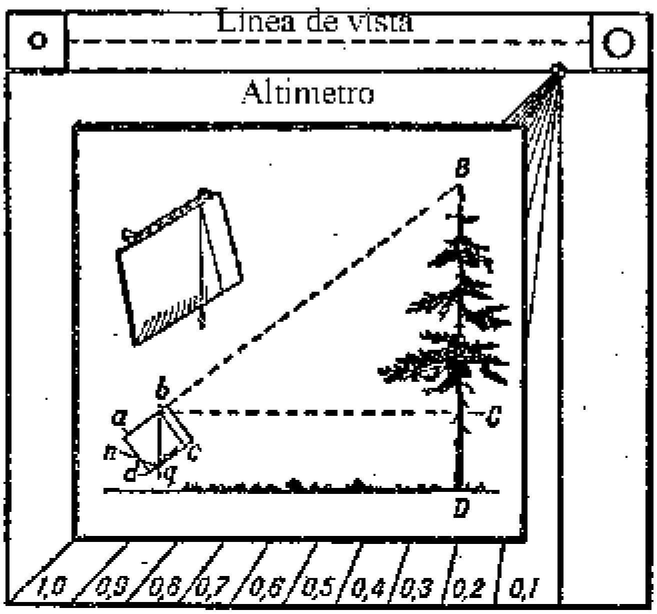

Figura 12. El altímetro de los silvicultores

Se hace un rectángulo *abcd,* de cartón o madera para sostener en las manos, mirando a lo largo del borde *ab,* alineándole con la cima *B* del árbol. El punto *b* tiene colgado una plomada *q*. Se marca el punto *n,* en el cual el hilo cruza la línea *dc.* Los triángulos *bBC* y *bnc* son semejantes, y como ambos son rectángulos y tienen los ángulos agudos igualdades *bBC* y *bnc* (conforme con los lados paralelos), entonces podemos escribir la proporción

$$BC : nc = bC : bc;$$

De aquí se desprende

$$BC = \frac{bC \times nc}{bc}$$

Como *bC, nc* y *bc* son conocidos, entonces es fácil de encontrar la altura buscada del árbol, añadiendo la distancia de la parte baja del tronco *CD* (la altura del instrumento sobre la tierra).
Falta añadir algunos detalles. Si el borde *bc* de la tabla es igual, por ejemplo, a 10 cm, marcando las divisiones del centímetro, pues la proporción *nc/bc* siempre va a expresarse como fracción decimal, indicará directamente la fracción de la distancia *bC* , que es la altura *BC* del árbol.